

# Interactions fluide–paroi

Sergueï KORNELIK<sup>a,b</sup>, Salah NAILI<sup>a</sup>, Christian ODDOU<sup>a</sup>, Alexi BOUBENTCHIKOV<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de mécanique physique, ESA 7052 CNRS, Université Paris XII, Val-de-Marne, Faculté des sciences et technologie, 61, avenue du Général-de-Gaulle, 94010 Créteil cédex, France

<sup>b</sup> Laboratoire d'analyse mathématique, Université d'état de Tomsk, Faculté de mécanique et mathématiques, Prospekt Lenina 36, 634040 Tomsk, Russie  
Courriel : kornelik@mail.tomsknet.ru; naili@univ-paris12.fr; oddou@univ-paris12.fr

(Reçu le 17 avril 2000, accepté après révision le 4 juillet 2000)

## Résumé.

L'objet de ce travail est la modélisation et l'analyse des interactions fluide–paroi dans une cavité cylindrique déformable à orifice unique servant à la fois à l'admission et à l'échappement d'un fluide visqueux incompressible. L'analyse du système d'équations rend compte du comportement en fonction de cinq paramètres caractéristiques sans dimension. Les équations couplées décrivant la dynamique sont ensuite résolues numériquement par une intégration temporelle décalée. Les solutions obtenues permettent d'étudier l'influence respectives des paramètres significatifs introduits. Enfin, on montre dans quelle mesure les effets visqueux peuvent être approximés afin de découpler le système d'équations. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**interactions fluide–paroi / système non linéaire / résonance**

## *Fluid–wall interactions*

## Abstract.

*The object of this work is the modelling and the analysis of fluid–wall interactions in a cylindrical cavity with a unique orifice serving both as inflow and outflow of an incompressible fluid. The analysis shows that the system's behavior is governed by the values of five dimensionless characteristic parameters. The coupled equations system is then approximated by using a staggered scheme which enables to integrate the structure and the fluid parts separately during each time step. A numerical solution is given with the respective influence of each introduced parameter. We conclude by giving an approximation of the viscous friction effects allowing to uncouple the system of equations. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

*fluid–wall interactions / nonlinear system / resonance*

## *Abridged English version*

The studied system is a deformable cylindrical cavity where an instationary viscous incompressible fluid is generated by pressurization through one of its extremities. On the other extremity, the cavity is ended by a mobile piston connected to a spring, whose rigidity  $k$  is supposed to be constant. The cavity and the piston are considered to have a negligible mass. *Figure 1* gives notations relative to the geometry of the system.

Neglecting body forces per unit mass and summing the two equations derived from the fundamental principle of dynamics applied successively to the domain  $\mathcal{D}$  containing the fluid and to the envelope (cavity and piston), we get the relation (1), where  $\rho$  designates the density of the fluid,  $\vec{U}$  its velocity,  $\vec{T}_F$  and

**Note présentée par Jean SALENÇON.**

$\vec{T}_e$  are the stress vectors of external forces acting on the surfaces  $S_F$  limiting the domain  $\mathcal{D}$  and  $S_e$  the envelope surface, respectively,  $dv$  is the differential element of the domain  $\mathcal{D}$ , and finally,  $dS_F$  and  $dS_e$  are the differential elements of the fluid surface and the envelope, respectively.

By using the continuity of stresses and velocities at the interface  $\Gamma = S_F \cap S_e$  in (1), we determine the governing equation of the piston's movement given by (2), where  $f_f$  is the axial component of the parietal friction force,  $\gamma$  the elongation of the spring,  $p_e(t)$  and  $p_p(t)$  are the average pressures of the fluid on sections  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_3$ .

The force  $f_f$  is determined by the stress vector, resulting from the action of the wall on the fluid (3), where  $U_x$  designates the axial direction of the fluid velocity and  $L(t) = L_1 + L_2 + \gamma(t)$ .

Hereafter, we introduce a mean 'entrance' pressure term defined by (4) whose form is chosen such that  $p(t) = p_m + p_a \sin(\omega t - \pi/2)$ , where  $p_m$  and  $p_a$  are given constants and  $\omega$  is the frequency of excitation.

To lead an analysis, using dimensionless variables, we introduce the notations (5) and (6). In this case, relation (2) becomes (7). The dimensional analysis of equation (7) introduce the characteristic dimensionless parameters (8a) and (8b).

The determination of  $\vec{f}_f$  necessitates to know the velocity field of the fluid at each instant. This field is obtained by solving the equations of the fluid dynamics in a vorticity-stream function formulation, noted  $(\Omega - \psi)$ , associated to an Arbitrarily Lagrangian Eulerian method. The system of equations describing the fluid dynamics [2], with dimensionless variables, taking into account the axial symmetry, is given by (9)–(13), where  $\bar{U}_x$ ,  $\bar{U}_r$  and  $\bar{W}_x$ ,  $\bar{W}_r$  are the components of the fluid and mesh velocities respectively in the  $x$  and  $r$  directions.

The boundary conditions are given by relations (14)–(21). Initial conditions of the system are chosen in such a sort that the time interval associated to the transitory regime is the shortest possible. Then, the postulated conditions are given by (22). The conditions (23) are chosen in order to secure the stability of the numerical scheme when the mesh is submitted to a large dilation.

The system of coupled equations is then solved by applying the staggered scheme which allows to integrate the equations related to the structure and the fluid parts separately during each time step. The fluid part is integrated by the finite difference method [3] associated to an Arbitrary Lagrangian Eulerian formulation and the structure part related to the piston's movement by the Runge–Kutta method.

Values of the geometrical parameters of the system are chosen in accordance with experimental model designed by Dantan [4] in a physical simulation of the cardiac hemodynamics. From these data, we obtain the mean extension  $\bar{\gamma}_0$  which is linked to the mean system dilation  $D_r$  according to the first relation (8b).

The respective influence effects of the structure rigidity, fluid viscosity and applied external loads has been analyzed. To achieve this task, we introduce the amplitude of  $\bar{\gamma}$ , noted  $A$ , defined by the relation  $A = \bar{\gamma}_M - \bar{\gamma}_m$ , where  $\bar{\gamma}_M$  and  $\bar{\gamma}_m$  designate respectively the maximal and minimal values of  $\bar{\gamma}(\bar{t})$  at the permanent state.

In *figure 2*, we show the impedance spectrum of such a resonant system,  $A$  vs.  $K$  for four values of the  $\alpha$  reduced dissipation parameter with reduced external pressure  $P_a = 1$ . They show clearly that an important increase in  $A$  takes place around the value  $K \sim 1$  which correspond to the resonant frequency conditions.

By giving an approximation of  $\vec{f}_f$ , we can uncouple the system. To this end, we use the incompressibility condition and we approximate the velocity at each cross section by a parabolic profile. Finally, we have approximation expression (25) which has the merit to simplify considerably the problem and to reproduce faithfully enough the behavior of the coupled system as shown by the similarity in *figure 2* (complete simulation) and *figure 3* (approximation model). We also notice a gap in the curve's slope for  $\alpha$  equal to 20 and 100, this gap being due to the conditions given by relation (21).

In conclusion, the proposed model shows that non linear effects associated with large deformation of the system implying variations in inertia and viscous effects play a nonnegligible role in the coupled phenomenon dynamics of fluid–wall interactions. In addition, we have shown in what measure we can uncouple such a system.

## 1. Introduction

L'étude des phénomènes couplés a connu un essor important ces dernières années. Dans ce cadre, on trouve les interactions fluide–paroi qui mettent en jeu une enveloppe déformable dans laquelle circule un fluide. Dans ce processus, les dynamiques de chacun des composants fluide et solide sont interdépendantes par les conditions imposées à l'interface. Une des originalité du travail proposé ici est d'analyser un écoulement dans un domaine partiellement fermé, i.e. dans une cavité déformable ne possédant qu'un orifice unique servant à la fois pour l'admission et l'échappement de fluide. L'objet de ce travail est la modélisation et l'étude des interactions fluide–paroi intervenant dans le comportement dynamique d'un système couplé oscillant fortement non linéaire. L'analyse permet de rendre compte de ce comportement en fonction des paramètres caractéristiques les plus influents.

On considère une cavité cylindrique à paroi latérale rigide dans laquelle est engendré par une pressurisation dynamique un écoulement instationnaire d'un fluide visqueux incompressible. L'une des bases de cette cavité est limitée par un piston mobile relié à un ressort. On montre, par une analyse dimensionnelle des équations décrivant les comportements dynamiques des ensembles cavité–piston et fluide, qu'ils peuvent être caractérisés par cinq paramètres sans dimension. En utilisant une intégration temporelle décalée associée à une formulation Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne [1], la solution numérique du système d'équations couplées est obtenue. L'influence des effets respectifs de la rigidité de la cavité et de la viscosité du fluide est déterminée puis discutée. On montre, en particulier, dans quelle mesure les effets visqueux associés à la dynamique du champ d'écoulement peuvent être approximés ce qui permet de découpler le système d'équations.

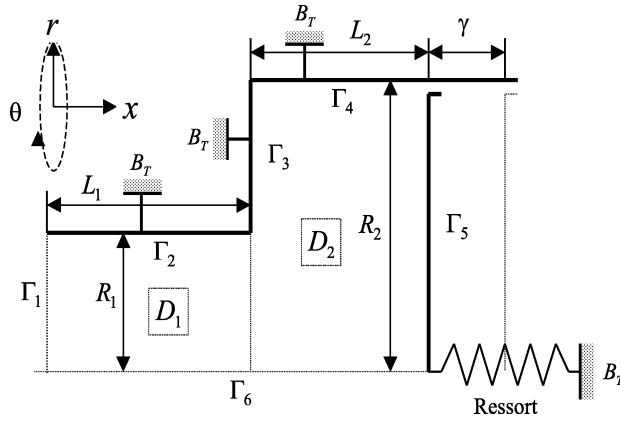
## 2. Formulation du problème

Le système étudié est une cavité cylindrique déformable dont l'une des extrémités est un tube rigide dans lequel est engendré un écoulement instationnaire d'un fluide visqueux incompressible. À l'autre extrémité, la cavité est limitée par un piston mobile relié à un ressort, dont la rigidité  $k$  est supposée constante. L'enveloppe de la cavité est fixée à un bâti  $\mathbf{B}_T$  et le piston est supposé de masse négligeable. La *figure 1* donne les notations afférentes à la géométrie du système. Sa dynamique peut être présentée de la façon suivante : (i) les gradients de pressions intra-cavitaire engendrent le mouvement du fluide, (ii) l'action de ce dernier sur la surface  $S_F$  du piston provoque une déformation du ressort, (iii) cette déformation induit des variations d'écoulement, (iv) de nouveau, on a (i), etc.

Si l'on néglige les forces de volume, en sommant les deux équations issues du principe fondamental de la dynamique appliquée successivement au domaine  $\mathcal{D}$  contenant le fluide, puis à l'enveloppe (cavité et piston), on a la relation :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{U} dv \right\} = \oint_{S_F} \vec{T}_F dS_F + \oint_{S_e} \vec{T}_e dS_e \quad (1)$$

où  $\rho$  désigne la densité volumique de masse du fluide,  $\vec{U}$  son vecteur vitesse,  $\vec{T}_F$  et  $\vec{T}_e$  les vecteurs contraintes des forces extérieures agissant sur la surface  $S_F$  limitant le domaine  $\mathcal{D}$  et sur la surface  $S_e$  de l'enveloppe respectivement,  $dv$  l'élément différentiel de volume du domaine  $\mathcal{D}$  et, enfin,  $dS_F$  et  $dS_e$  les éléments différentiels de surface du fluide et de l'enveloppe respectivement.



**Figure 1.**  $\Gamma_1$  désigne la section d’entrée et de sortie du système.  $\Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  représentent les parois latérale fixe,  $\Gamma_5$  désigne la surface plane du piston rigide,  $\Gamma_6$  est l’axe de symétrie.  $\gamma$  est l’allongement du ressort.  $R_1, R_2, L_1$  et  $L_2$  sont respectivement les rayons et longueurs de la cavité.  $x, r$  et  $\theta$  désignent les coordonnées cylindriques.  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  représentent les domaines contenant le fluide.

**Figure 1.**  $\Gamma_1$  designates the entry and exit section of the system.  $\Gamma_2, \Gamma_3$  and  $\Gamma_4$  represent the lateral fixed walls,  $\Gamma_5$  designates the surface of the rigid piston,  $\Gamma_6$  is the axis of symmetry.  $\gamma$  is the elongation of the spring.  $R_1, R_2, L_1$  and  $L_2$  are respectively the radii and lengths of the cavity.  $x, r$  and  $\theta$  designate the cylindrical coordinate.  $\mathcal{D}_1$  and  $\mathcal{D}_2$  represent the domains containing the fluid.

En utilisant la continuité des contraintes et des vitesses à l’interface  $\Gamma = S_F \cap S_e$  dans l’équation (1), on détermine l’équation donnant la position du piston exprimée par :

$$\rho \frac{d}{dt} \left\{ (L_1 + L_2 + \gamma(t)) \pi R_2^2 \frac{d\gamma}{dt} \right\} = f_f(t) - k\gamma + p_e(t) \pi R_1^2 + p_p(t) \pi (R_2^2 - R_1^2) \quad (2)$$

où  $k$  désigne la raideur du ressort,  $f_f$  la force de frottement pariétal due à l’action de la paroi sur le fluide dans la direction axiale,  $\gamma$  l’allongement du ressort,  $p_e(t)$  et  $p_p(t)$  les pressions moyennes du fluide sur les sections  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  respectivement.

La force de frottement pariétal d’origine visqueuse  $f_f$  est déterminée à partir du vecteur contrainte et est donnée par la relation :

$$f_f(t) = 2\pi\mu \left\{ R_1 \int_0^{L_1} \frac{\partial}{\partial r} U_x(x, R_1, t) dx + R_2 \int_{L_1}^{L(t)} \frac{\partial}{\partial r} U_x(x, R_2, t) dx \right\} \quad (3)$$

où  $U_x$  désigne la composante axiale du vecteur vitesse du fluide et  $L(t) = L_1 + L_2 + \gamma(t)$  la longueur instantanée du système.

Pour la suite, on introduit la somme pondérée des pressions suivante :

$$p(t) = p_e(t) + \left( \frac{R_2^2}{R_1^2} - 1 \right) p_p(t) \quad (4)$$

dont la variation temporelle est choisie telle que :  $p(t) = p_m + p_a \sin(\omega t - \pi/2)$ , avec  $p_m$  et  $p_a$  des constantes données,  $\omega$  la fréquence de sollicitation du système.

Dans le but de mener une analyse en utilisant des variables adimensionnelles, on introduit les notations suivantes :

$$\bar{t} = \omega t, \quad \bar{x} = \frac{x}{L_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{L_0}, \quad \bar{L}_1 = \frac{L_1}{L_0}, \quad \bar{L}_2 = \frac{L_2}{L_0}, \quad \bar{R}_1 = \frac{R_1}{L_0}, \quad \bar{R}_2 = \frac{R_2}{L_0} \quad (5)$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho L_0^2 \omega^2}, \quad \bar{f}_f = \frac{f_f}{\mu L_0^2 \omega}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{L_0}, \quad \bar{\gamma}_0 = \frac{\gamma_0}{L_0}, \quad \bar{U}_x = \frac{U_x}{L_0 \omega}, \quad \bar{U}_r = \frac{U_r}{L_0 \omega} \quad (6)$$

avec  $L_0 = L_1 + L_2 + \gamma_0$  et  $\gamma_0 = \pi R_1^2 p_m / k$ .

Dans ce cas, la relation (2) devient :

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left\{ (\bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \bar{\gamma}(\bar{t})) \frac{d\bar{\gamma}}{d\bar{t}} \right\} - \frac{1}{\pi R_2^2 \alpha^2} \bar{f}_f(\bar{t}) + K(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_0) = S P_a \sin(\bar{t} - \pi/2) \quad (7)$$

L'équation (7) fait apparaître les paramètres caractéristiques sans dimension suivants :

$$\alpha = L_0 \sqrt{\frac{\rho \omega}{\mu}}, \quad K = \frac{k}{\rho \pi R_2^2 L_0 \omega^2}, \quad P_a = \frac{p_a}{\rho L_0^2 \omega^2} \quad (8a)$$

$$D_r = \frac{\pi R_2^2 \gamma_0}{L_1 \pi R_1^2 + (L_2 + \gamma_0) \pi R_2^2}, \quad S = \frac{R_1^2}{R_2^2} \quad (8b)$$

Le paramètre  $\alpha$ , nombre de Reynolds instationnaire, représente au sein du fluide le rapport entre les forces d'inertie due à l'instationnarité du mouvement et celles dues à la viscosité. La rigidité réduite  $K$  représente pour l'ensemble du système le rapport des effets capacitifs et inertiels dus à l'instationnarité du mouvement global. Le paramètre associé aux efforts extérieurs instationnaires  $P_a$  représente le rapport des effets dus à ces efforts extérieurs et des effets inertiels instationnaires. Enfin, le nombre  $D_r$  caractérise une dilatation moyenne du domaine  $\mathcal{D}$  à l'état stationnaire et l'indice  $S$  la forme associée à la géométrie.

La détermination de  $\bar{f}_f$  nécessite la connaissance du champ des vitesses à chaque instant. Celui-ci est obtenu par la résolution des équations de la dynamique du fluide en formulation vorticité-fonction de courant ( $\Omega - \psi$ ) associée à une description Arbitrairement Lagrangienne Eulerienne.

Le système d'équations décrivant l'écoulement [2], en variables adimensionnelles ( $\bar{\Omega} - \bar{\psi}$ ) est, compte tenu de la symétrie axiale, donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{t}} + \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{x}} V_x + \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} V_r - \frac{\partial \bar{W}_x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{W}_r}{\partial \bar{r}} \frac{d\bar{U}_r}{d\bar{r}} - \frac{\partial \bar{W}_r}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \bar{r}} + \dots + \frac{\partial \bar{W}_x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial \bar{x}} \\ = \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{r}} \right) = -\bar{\Omega} \quad (10)$$

$$\bar{U}_x = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{r}}, \quad \bar{U}_r = -\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial \bar{r}} \quad (11)$$

$$\bar{V}_x = \bar{U}_x - \bar{W}_x, \quad \bar{V}_r = \bar{U}_r - \bar{W}_r \\ \bar{W}_x = \bar{W}_r = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_1 \quad (12)$$

$$\bar{W}_x = \frac{d\bar{\gamma}}{d\bar{t}} \frac{(\bar{x} - \bar{L}_1)}{(\bar{\gamma} + \bar{L}_2)}, \quad \forall \bar{x} \in [\bar{L}_1, \bar{L}(\bar{t})] \quad \text{et} \quad \bar{W}_r = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_2 \quad (13)$$

où  $\bar{\Omega}$  désigne la composante azimutale de la vorticité,  $\bar{\psi}$  la fonction de courant,  $\bar{U}_x$  et  $\bar{U}_r$  les composantes du vecteur vitesse du fluide selon les axes  $x$  et  $r$  respectivement,  $\bar{W}_x$  et  $\bar{W}_r$  les composantes du vecteur vitesse du maillage selon les axes  $x$  et  $r$  respectivement.

Sur la frontière  $\Gamma_1$ , les conditions aux limites suivantes doivent être satisfaites :

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\Omega} = -\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (14)$$

S. Kornelik et al.

Afin que ces conditions soient respectées, la longueur  $\bar{L}_1$  doit être suffisamment grande par rapport à  $\bar{R}_1$ . Les conditions de non glissement du fluide à la paroi  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ , et d'incompressibilité donnent la relation :

$$\bar{\Omega} = -\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{r}^2} \quad (15)$$

L'utilisation des mêmes conditions sur la frontière  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_5$  conduit à :

$$\bar{\Omega} = -\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} \quad (16)$$

La valeur de la fonction de courant est définie à une constante arbitraire près. Sur les frontières  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  qui forment une seule et même ligne de courant, cette constante est déterminée par la relation :

$$\bar{\psi} = 0 \quad (17)$$

La continuité des vitesses sur la frontière  $\Gamma_5$  donne :

$$\bar{U}_x = \frac{d\bar{\gamma}}{d\bar{t}} = \bar{U}_p \quad (18)$$

où  $\bar{U}_p$  désigne la vitesse du piston. Puisque la vitesse du piston est indépendante de  $r$ , on a, en utilisant la relation reliant la vitesse axiale à la fonction  $\bar{\psi}$ , la condition :

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2} \bar{r}^2 \bar{U}_p + c(\bar{t}) \quad \text{sur } \Gamma_5 \quad (19)$$

où  $c(\bar{t})$  est une fonction du temps.

La propriété de continuité de la fonction de courant permet de déterminer sa forme. En effet, par continuité, celle-ci est nulle pour tout  $\bar{t}$  à l'intersection de  $\Gamma_4$  et  $\Gamma_5$ . On a alors :

$$c(\bar{t}) = -\frac{\bar{R}_2^2}{2} \bar{U}_p \quad (20)$$

La symétrie axiale et l'hypothèse d'incompressibilité conduisent aux conditions :

$$\bar{\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\psi} = c(\bar{t}) \quad \text{sur } \Gamma_6 \quad (21)$$

Afin de réduire la durée du régime transitoire et compte tenu de la seule information exploitable sur la position d'équilibre approchée du piston, les conditions initiales postulées sont les suivantes :

$$\bar{\gamma}(0) = \bar{\gamma}_0, \quad \frac{d\bar{\gamma}}{d\bar{t}}(0) = 0, \quad \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{r}, 0) = 0, \quad \bar{\Omega}(\bar{x}, \bar{r}, 0) = 0 \quad (22)$$

### 3. Résolution numérique

La résolution du système d'équations couplées est réalisée à l'aide d'un schéma numérique d'intégration temporelle décalée des deux sous-systèmes d'équations. La partie fluide est intégrée par une méthode aux différences finies [3] associée à une formulation Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne et la partie structure définissant le mouvement du piston par une méthode de Runge-Kutta.

Dans des conditions particulières de très fortes déformations de la cavité une instabilité du schéma numérique peut se produire. Elle est la conséquence d'une trop grande dilatation de l'espace occupé par

le fluide. En effet, il est nécessaire d’assurer un rapport des pas de discrétisation selon les deux directions compatibles avec les schémas numériques utilisés. Des tests ont permis d’obtenir des conditions assurant cette stabilité. Elles sont données par :

$$\text{si } \bar{\gamma} \leq -\frac{1}{2}\bar{L}_2 \text{ alors } \bar{\gamma} = -\frac{1}{2}\bar{L}_2 \text{ et } \bar{U}_p = 0 \quad (23)$$

#### 4. Résultats et discussion

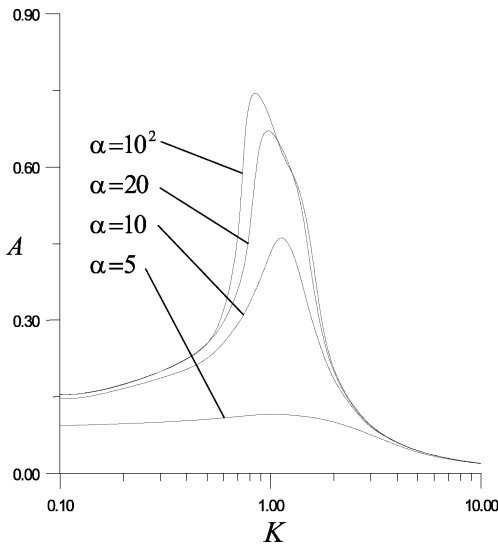
Les valeurs des paramètres géométriques du système sont choisies en accord avec les conditions d’expériences effectuées en laboratoire sur des écoulements instationnaires en cavité cylindrique. Ainsi, on en déduit les valeurs suivantes [4] :

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_2 = 0,42, \quad \bar{\gamma}_0 = 0,16, \quad \bar{R}_2 = 0,27, \quad D_r = 0,25, \quad S = 0,15 \quad (24)$$

en vertu de  $R_1 = 0,01$  m,  $R_2 = 0,026$  m et  $L_1 = L_2 = 0,04$  m. Avec ces données géométriques qui correspondent à une forme moyenne du système, on en déduit le paramètre  $\bar{\gamma}_0$  puisqu’il est lié au paramètre  $D_r$  d’après la première relation (8b).

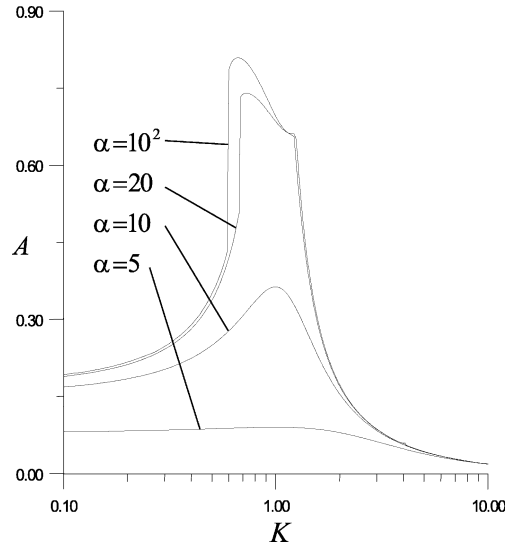
On se propose d’étudier l’influence des effets respectifs de la rigidité du ressort et de la viscosité du fluide, d’une part, et des efforts appliqués sur le système, d’autre part. Cette étude nous permettra de quantifier l’influence des paramètres associés à ces effets et des non-linéarités du système.

Pour ce faire, on introduit l’amplitude de  $\bar{\gamma}$ , notée  $A$ , définie par la relation  $A = \bar{\gamma}_M - \bar{\gamma}_m$ , où  $\bar{\gamma}_M$  et  $\bar{\gamma}_m$  désignent respectivement les valeurs maximale et minimale de  $\bar{\gamma}(t)$  lorsque le régime est établi.



**Figure 2.** Variation de  $A$  en fonction de  $K$  pour les valeurs de  $\alpha = 5, 10, 20$  et  $100$  lorsque  $P_a = 1$ .

**Figure 2.** Variation of  $A$  vs.  $K$  for values of  $\alpha = 5, 10, 20$  and  $100$  when  $P_a = 1$ .



**Figure 3.** Mêmes données que la figure 2 lorsque l’on utilise l’approximation donnée par la relation (25). On remarquera les changements de pente dus aux conditions données par les relations (23).

**Figure 3.** Same data as those of figure 2 when we use the approximation given by the relation (25). We notice a gap of the curve’s slope for  $\alpha$  equal 20 and 100 when the system is in resonance. These slope breaks are due to conditions given by relation (23).

Nous montrons *figure 2* l'évolution de  $A$  en fonction du paramètre  $K$  pour quatre valeurs du nombre  $\alpha$  lorsque le régime est établi pour  $P_a = 1$ . Ces courbes sont caractéristiques d'un système oscillant où la résonance du système linéarisé est obtenue au voisinage  $K \sim 1$ . D'autre part, on remarque une dépendance importante par rapport au paramètre caractérisant les effets de viscosité  $\alpha$  pour  $0,3 \leq K \leq 3,0$ . De plus, lorsque  $\alpha$  croît, on constate que le maximum de  $A$  se déplace vers la gauche. On peut attribuer ce phénomène à la fois aux effets de viscosité,  $\alpha^2 < 10$ , et aux non linéarités intervenant dans le comportement du système.

Afin de découpler le système d'équations, on établit une approximation de  $\bar{f}_f$  en fixant la forme des profils de vitesse dans l'écoulement. On utilise pour ce faire la condition d'incompressibilité et l'hypothèse d'une dynamique dominée par les effets de viscosité compatible avec les valeurs de  $\alpha$  postulés. Il en résulte dans chaque section droite un profil parabolique des vitesses qui détermine le gradient de vitesse à la paroi. Il vient alors l'expression :

$$\bar{f}_f(t) = -2 \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \left\{ \frac{\bar{L}_1}{S} + \bar{L}_2 + \bar{\gamma} \right\} \quad (25)$$

Cette approximation a le mérite de simplifier considérablement le problème et de reproduire de façon assez fidèle le comportement du système couplé comme le montre la comparaison des résultats donnés par les *figures 2* et *3*. On pourra aussi remarquer sur cette dernière figure une rupture brusque de la pente de la courbe pour  $\alpha$  supérieure à 20 lorsque le système entre en résonance. Ces ruptures de pente sont probablement dues aux conditions artificielles données par les relations (21).

En conclusion et dans la limite des paramètres étudiés, le modèle proposé montre que les effets non linéaires associés d'une part à l'inertie, et d'autre part, à la force de frottement jouent un rôle non négligeable dans la dynamique de phénomènes couplés d'interactions fluide-paroi apparaissant dans le cas d'une cavité subissant de grandes déformations volumiques. En outre, on a montré dans quel domaine de paramètres ces phénomènes peuvent être découplés.

### Références bibliographiques

- [1] Hughes T.J.R., Liu W.K., Zimmermann T.K., Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Enging.* 33 (1981) 329-349.
- [2] Guyon E., Hulin J.P., Petit L., *Hydrodynamique Physique*, InterEditions, 1991.
- [3] Roach J.P., *Computational fluid dynamics*, Hermosa publishers, Albuquerque, 1982.
- [4] Dantan P., Étude numérique et expérimentale de l'écoulement instationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans une cavité de dimension variable. Modélisation de l'hémodynamique cardiaque. Thèse d'état, Université Paris 7, 1985.