Математические модели инновационного маркетинга

[1]*А.Н.Гришин,* [1]*С.Е.Корнелик,* [2]*Б.Е.Тривоженко,* [3]*В.В.Чунарёв*
[1]ООО «НПКЦ «ИНТЕГРАЛ», Томск,
[2]Западно-Сибирский филиал Российского государственного университета информационных технологий и предпринимательства, г. Томск
[3]Томский государственный университет, г. Томск
e-mails: gan@mail.tsu.ru, k.s.e.@mail.tsu.ru

Современный маркетинг по оценкам специалистов - это еще не научное направление в экономической мысли, а интуитивное ремесло на грани «искусства». Такое мнение сложилось в мире практического и теоретического маркетинга[1–3]. Причина кроется в парадигме: «всё для покупателя», а неопределенность в желаниях современного покупателя лежит в его природных потребительских инстинктах [1, 4] Поэтому маркетинг многолик для анализа и построения единой теории или фундаментальных моделей. Отсюда на роль и функциональные возможности маркетинга существуют порой противоположные взгляды [1]. В последнее время появилось даже экзотическое, на первый взгляд, исследовательское направление, опирающееся на сравнительную психологию между поведением индивидуальных особей в группах, семействах разных видов и поведением покупателя, групп покупателей и покупательских сообществ (союзов) на рынке [5-7]. Сегодня это направление находит подтверждение в практике, опираясь на вирусную бизнес-идею о базовых инстинктах человека (безопасность; желание иметь деньги и тратить их; быть оригинальным, независимым и амбициозным и заботиться о детях) [5].

Более строгий подход основан на системном анализе смоделированного потребительского поведения покупателей [7–9]. Он сложен и нов для российского маркетинга, но, на наш взгляд, весьма продуктивен. Особенно он ценен в инновационном новаторском маркетинге. В его рамках могут укладываться как простейшие математические модели, так и сложные системы и программы аналитико-прогнозного моделирования

В настоящем сообщении, опираясь на [1,4,5,9,10], использованы некоторые математические модели биологии для маркетингового анализа потребительского спроса и реализации нового продукта (рыночного товара).

1. **Формализованная детерминированная модель** покупательского спроса на новый товар с идеальными и неидеальными условиями сделок представляет собой функцию спроса в виде:

$$N(t) = N_0 \alpha t\,, \tag{1}$$

где $N(t)$ – число покупок α – корригирующий коэффициент (из практики маркетинга $\alpha \le 0.39$), N_0 – число покупателей, участвующих в покупках.

При $\alpha > 0$ и $t = 0$ $N(t) = N_0$; при $\alpha \to \infty$ и $t \to \infty$ $\lim N(t) \to N_0$ Здесь отражены сравнительно крайние случаи: низкий спрос и ажиотажный спрос соответственно

Если рассмотреть модель по Фернхюсту [3], которая включает в себя логистическую функцию распределения покупок с коэффициентом γ, выражающим реакцию покупателя на новый товар, то число покупок (или купивших товар покупателей) можно записать в виде:

$$N(t) = \frac{(\alpha / \gamma) N_0}{1 + \left(\frac{\alpha}{\gamma} - 1 \right) N_0 e^{-\alpha t}} \qquad (2)$$

Если $N = \alpha / \gamma$ – равновесное значение величины сделка – покупка, а «рыночная стихия» проявляется в форме кривых распределения $N(t)$, то, когда S – образная логистическая зависимость «выходит» на насыщение независимо от α, γ, N_0, подтверждается фундаментальный принцип природы: всё живое и не живое стремится к равновесию (будь-то сложная биофизическая или биологическая система, или экономическая рыночная среда). На функциональную кривую, описанную в (2), возможны «наложения» флуктуаций, отражающих в нашем случае конъюнктуру потребительского рынка из-за индивидуальных предпочтений и «наложений» внешних факторов. Отсюда форма распределения $N(t)$ может измениться в области «насыщения». Такое неустойчивое состояние «не даёт» информацию для объективного анализа и прогноза в поведении покупателей. Модель с несколькими устойчивыми состояниями, как нам представляется, более адекватно отражает в расчетах реальный покупательский спрос. Запишем дифференциальное уравнение в виде функции распределения:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha(N) N \, . \qquad (3)$$

Здесь $\alpha(N)$ – функция прироста покупательского спроса (выбирается априори на основе опытных данных в виде функции вероятностного распределения с использованием метода Монте-Карло или на основе опытной апробированной статистики). Решение уравнения (3) применимо для разных условий: адаптация, спрос, ажиотажный спрос, стабильный спрос или утрата покупательского интереса к товару (продукту). В этом случае можно оценивать интенсивность покупок (или предпочтений) в единичных или групповых взаимодействиях. Если ввести функцию $\alpha(N)$ на временном интервале максимального покупательского интереса за время t, то уравнение покупок будет иметь вид:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[\alpha - \gamma N(t-\tau)\right] N(t-\tau) \ . \tag{4}$$

Устремив число активных покупателей к $\lim N(t) = N$ и прейдя к пределу в уравнении (4), можно найти функцию распределения покупательского спроса для случая:

$$(\alpha - \gamma\, N)\, N = 0 \ . \tag{5}$$

Решение уравнений (4) и (5) однонаправленное с устойчивостью $N = \alpha/\gamma$, которое легко исследуется методом линеаризации уравнения (2). Кривая с насыщением как классическая логистическая зависимость с множеством сценариев развития в области S – устойчивости связана с рисками (оптимизирующая часть в области устойчивости) недопродаж или дефицита товара на рынке.

Уравнение (5) отражает в динамике процесс взаимодействия покупатель-продавец. Запишем функцию $N(t)$ в виде уравнения:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha(t) N \ , \tag{6}$$

где решение уравнения имеет вид:

$$N(t) = N_0 \exp\left[\int_0^t \alpha(t) dt\right], \tag{7}$$

при условии, что $\alpha(t)$ – это независимая функция в любой момент времени, подчиняющаяся нормальному закону со средним значением $\overline{\alpha}$ и дисперсией σ^2.

В этом случае детерминированная модель с реальными условиями взаимодействия покупатель-продавец $\alpha(t)$ может дать полное решение в виде плотности вероятности распределения покупок:

$$\rho\left(\frac{\alpha\gamma}{N_0}\right) = \frac{N_0}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left[\frac{\left(\ln\frac{N}{N_0} - \alpha t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right]. \tag{8}$$

«Наложив» флуктуации на $\alpha(N)$ и описывая их с помощью диффузионного приближения марковского случайного процесса, можно выразить классическое уравнение (1) в виде:

$$dN = \alpha(N)Ndt + \sigma\sqrt{Nd\xi}\ , \tag{9}$$

с единственным решением $N_{\max} = N_0 \exp(\alpha - \sigma^2)t$; где $d\xi$ – стандартный винеровский показатель случайного процесса. Уравнение (9) можно рассматривать как стохастический аналог уравнения (1), но учитывающий более полно конъюнктуру предпочтений и интересов реального покупателя в динамике. К сожалению, детерминированная S – модель даже с близкими к реальным условиями сделок и интенсивностью покупок имеет ограничение, не учитывающее тонкие флуктуационные отклонения как в процессе взаимодействия покупатель-продавец, так и в самой покупательской среде. Поэтому, с одной стороны, уточняя условия по конъюнктуре и покупательским предпочтения, а с другой стороны, выбирая более реалистичную и динамичную среду, становится очевидной необходимость применения недетерминированной стохастической модели.

2. Недетерминированная дискретная стохастическая модель рыночной реализации товара базируется на логике из маркетинговой практики. Пусть вероятность реализации в одни руки единицы товара в момент $[t + \Delta\tau - t]\beta dt$, где β – интенсивность группового спроса, а количество купивших этот товар $N\beta dt$ (интенсивность покупок), и вероятности невостребованности товара $\left[1 - (\beta + \mu)\right]dt$. Запишем динамику реализации товара (прогнозная ситуация) через цепь Маркова во времени с вероятностью реализации $N\mu dt$, где μ – математическое ожидание.

Упростим задачу, записывая (1) в виде:

$$F(x,t) = \sum_{N=0}^{\infty} x^N \rho_N(t)\ , \tag{10}$$

и считая, что $\rho_N(t)$ – вероятность реализации N единицы товара в интервале $[t + \alpha t]$. «Комбинируя» вероятностями единичных покупок во времени на интервалах $\Delta t, \Delta t + t_1, \Delta t + t_2$ и т.д. по схеме марковской цепи, можно записать систему дифференцированных уравнений в виде:

$$\frac{d\rho_0(t)}{dt} = \mu\rho_1(t)\ ,$$

$$\frac{d\rho_1(t)}{dt} = 2\mu\rho_2(t) - (\mu+\beta)\rho_1(t),$$

$$\frac{d\rho_2(t)}{dt} = 3\mu\rho_3(t) - 2(\mu+\beta)\rho_2(t) + \beta\rho_1(t), \qquad (11)$$

……………………………………………….

$$\frac{d\rho_n(t)}{dt} = (n+1)\mu\rho_{n+1}(t) - n(\mu+\beta)\rho_n(t) + (n-1)\beta\rho_{n-1}(t).$$

Интегрирование системы уравнений (11) можно осуществить методом производящих функций, рассматривая вместо самих вероятностей производящие функции и дифференцируя их в виде (10). Для этого умножим первое уравнение системы для $F(x,t)$ на x^0, второе на x^1, третье на x^2, $(n-1)$ уравнение на x^n и т.д. сложив левые и правые части.

В результате получим для $F(x,t)$ линейное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = (\beta x - \mu)(x-1)\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad (12)$$

где β – функция спроса; с начальным условием $F(x,0) = x^{N_0}$, вытекающим из начального условия для $\rho_N(t)$ в виде:

$$\rho_N(0) = \delta_{NN_0}. \qquad (13)$$

Здесь δ_{NN_0} – символ Кронекера, N_0 – количество единиц товара в момент времени $t=0$.

Уравнение (12) решается стандартным методом, когда соответствующие характеристики уравнения имеют вид:

$$dt = \frac{dx}{(1-x)(\beta x - \mu)} = \frac{dF}{0}. \qquad (14)$$

Два независимых первых интеграла этой системы запишутся так:

$$F = const, \frac{x-1}{\beta x - \mu} e^{(\beta-\mu)t} = const. \qquad (15)$$

Тогда общее решение уравнения (12) запишется в виде:

$$F(x,t) = \phi\left(\frac{x-1}{\beta x - \mu} e^{(\beta-\mu)t}\right). \qquad (16)$$

Здесь $\phi(x)$ – параметрическая функция, вид которой можно найти из начального условия (13):

$$F(x,0)=x^{N_0}\equiv\phi\left(\frac{x-1}{\beta x-\mu}\right). \quad (17)$$

Тогда из (17) имеем:

$$\phi(x)=\left(\frac{1-x}{1-\beta x}\right)^{N_0} \quad (18)$$

и полное решение:

$$F(x,t)=\left[\frac{(\beta x-\mu)-\mu(x-1)e^{(\beta-\mu)t}}{(\beta x-\mu)-\beta(x-1)e^{(\beta-\mu)t}}\right]^{N_0}. \quad (19)$$

Разлагая правую часть выражения (19) в ряд по степеням x, получим выражение для искомого $\rho_N(t)$. Определим для числа реализованных покупок товара $N(t)$ математическое ожидание $m(t)$:

$$m(t)=M\{N(t)\}=\left.\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial \ln F(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1}. \quad (20)$$

Если вычислить производную от логарифма производящей функции в точке $x=1$, то получим:

$$m(t)=N_0e^{(\beta-\mu)t}. \quad (21)$$

Запишем дисперсию флуктуаций спроса товара (ожидание покупок) в виде:

$$\sigma^2(t)=D\{N(t)\}=\left.\frac{\partial^2 \ln F(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial \ln F(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1}. \quad (22)$$

При $x=1$ производные от (22) будут:

$$\sigma^2(t)=N_0\frac{\beta+\mu}{\beta-\mu}\left[e^{(\beta-\mu)t}-1\right]e^{(\beta-\mu)t}. \quad (23)$$

При $\beta=\mu$, когда спрос и предложение уравновешены, тогда математическое ожидание будет $m(t)=N_0$, а дисперсия:

$$\sigma^2(t)=\lim_{\beta\to\mu}N_0\frac{\beta+\mu}{\beta-\mu}\left[e^{(\beta-\mu)t}-1\right]e^{(\beta-\mu)t}=2N_0\beta t. \quad (24)$$

Определим вероятность падения спроса, учитывая, что она может в момент t оказаться равной $\rho(t)=0$; т.е.:

$$\rho_0(t)=F(0,t)=\left[\frac{\mu e^{(\beta-\mu)t}-\mu}{\beta e^{(\beta-\mu)t}-\mu}\right]^{N_0},\beta\neq\mu. \quad (25)$$

Тогда при $\beta=\mu$ выражение (25) примет вид:

$$\rho_0(t) = \lim_{\beta \to \mu} \left[\frac{\mu e^{(\beta-\mu)t} - \mu}{\beta e^{(\beta-\mu)t} - \mu} \right]^{N_0} = \left(\frac{\beta t}{\beta t + 1} \right)^{N_0}. \tag{26}$$

Легко прогнозировать характер и время падения спроса на товар. Если $t \to \infty$ в выражениях (25) и (26) конечное выражение для вероятности ожидания падения спроса будет иметь вид:

$$\rho_0 = \lim_{t \to \infty} \rho_0(t) = \lim_{t \to \infty} \left\{ \left(\frac{\mu e^{(\beta-\mu)t} - \mu}{\beta e^{(\beta-\mu)t} - \mu} \right)^{N_0} = \begin{cases} \alpha, \beta \le \mu \\ \left(\dfrac{\mu}{\beta} \right)^{N_0}, \beta > \mu \end{cases} \right. . \tag{27}$$

С другой стороны, выражение (27) можно интерпретировать как интенсивность спроса и адекватность предложения. При максимально возможном удовлетворении спроса на товар существует два крайних варианта: при $\rho_0 = 0$ и $\beta < \mu$ интерес у покупателей на товар поддерживается по максимуму; а при $\rho_0 = \left(\dfrac{\mu}{\beta} \right)^{N_0}$ и $\beta > \mu$ интерес пропадает пропорционально второму выражению в (27). Базируясь лишь на анализе математического ожидания величины в стохастической модели, недостаточно знать только $\rho(t)$. Необходимо исследовать другие свойства модели, в которой требуется учесть не только внешние условия, но и природу стохастичности рыночных процессов.

Литература

1. *Карычев В.И.* Законы биологии в маркетинге./ www.e-xecutive.ru
2. *Голубков Е.П.* Триас де Без Фернандо. – Маркетинг в России и за рубежом №1, 2004.
3. *Котлер Ф.* Новые маркетинговые технологии – СПб, Нова, 2004.
4. *Броди Р.* Психические вирусы – ИВЦ «Маркетинг», 2002.
5. *Голдсмит Р.* Вирусный маркетинг – БалансБизнесБукс, 2003.
6. *Репьёв А.*Маркетинговое мышление, или Клиентомания – М, ЭКСМО, 2006.
7. *Акофф Р, Эмери* Э О целеустремлённых системах – М, 1974.
8. *Ильин В.И.* Поведение потребителей – СПб, 2000.
9. *Погостинская Н.Н., Погостинский Ю.А.* Системный подход в экономико-математическом моделировании - СПб, 1999.
10. *Тривоженко Б.Е* Математические модели в естествознании – ТГУ 1985.